Universidad Simón Bolívar
Departamento de Física

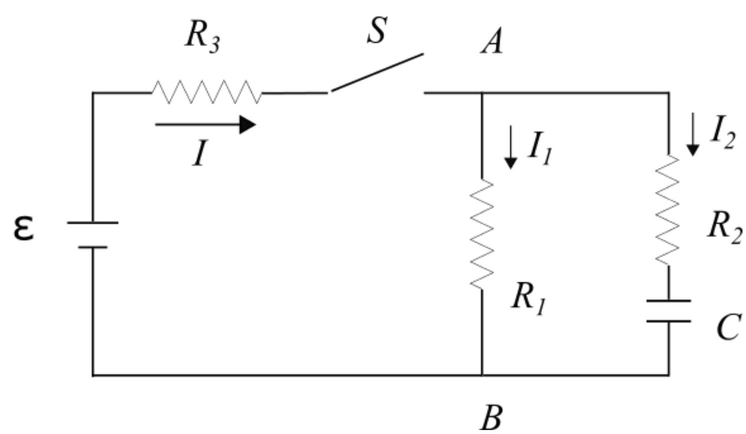
Física III (FS-2211)
3^{er} Examen Parcial (40 %)
Sep-Dic 2016

1. (15 pts.) En el circuito RC que se muestra en la figura, el interruptor S lleva abierto un tiempo muy largo. Sea ε la fuerza electromotriz ideal (tiene resistencia interna despreciable) que alimenta al circuito, C es la capacidad del condensador que inicialmente se encuentra descargado, mientras que todas las resistencias tienen el mismo valor R. $R_1 = R_2 = R_3 = R$ En el instante $t = 0$, se cierra el interruptor S

   (a) (6 pts.) Para cualquier tiempo $t > 0$, use las reglas de Kirchhoff que le permite obtener la ecuación diferencial que satisface la carga del condensador y encuentre la carga del condensador en funcion del tiempo, $q = q(t)$

   (b) (6 pts.) Calcule las corrientes eléctricas $I(t)$, $I_1(t)$ y $I_2(t)$ en función del tiempo.

   (c) (3 pts.) Encuentre la potencia disipada por la resistencia R_1 para un tiempo igual a la constante de tiempo del circuito.

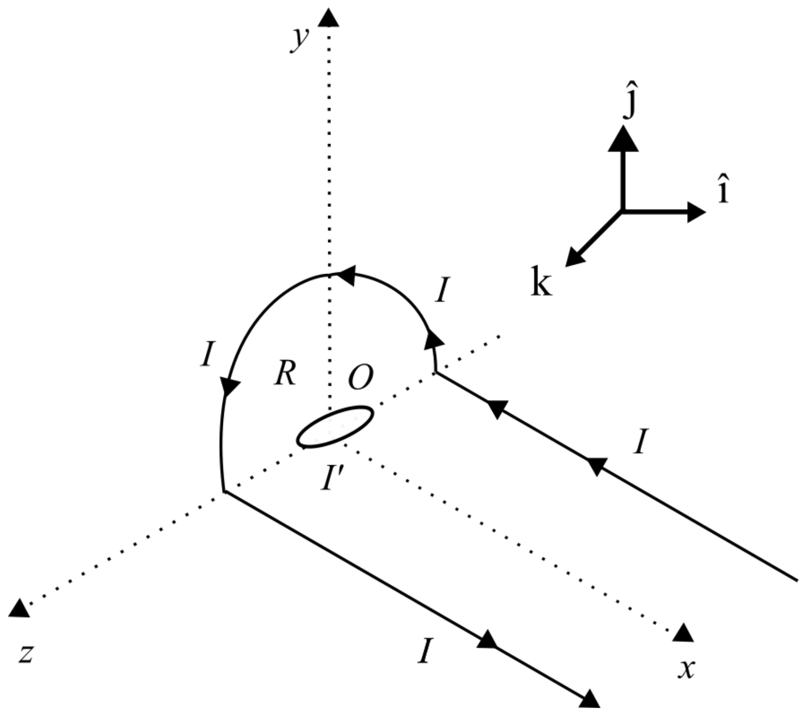


2. (15 pts.) Se tiene un alambre conductor consistente de tres secciones: La primera, es una recta paralela al eje x, definida por ($x > 0$, $y = 0$, $z = -R$); la segunda es una semicircunferencia de radio R en el plano yz, con centro en el origen de coordenadas O. La tercera sección es una recta paralela al eje x, definida por ($x > 0$, $y = 0$, $z = R$). Por el alambre circula una corriente electrica I ene l sentido indicado en la figura.

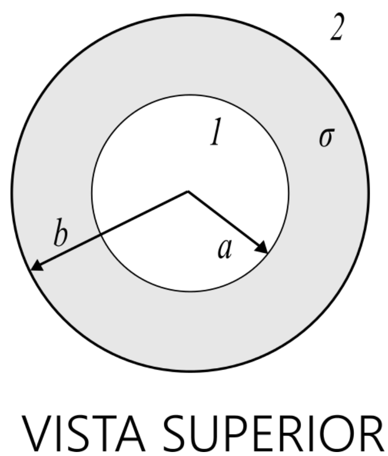
   (a) (8 pts.) Calcule el vector campo magnético total B producido por el alambre en el origen de coordenadas O.

   (b) (4 pts.) Calcule la fuerza experimentada por una partícua que tiene una carga positiva q, en el instante en que pasa por el origen O con velocidad $v = v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}$.

   (c) (3 pts.) En el origen de coordenadas O, se coloca una pequeña espira circular, de radio r (siendo $r << R$), con su plano coincidente con el plano xz. Por la espira para una corriente I' en sentido **antihorario** (Visto por un observados en puntos $y > 0$) Calcule el momento dipolar magnético μ de la espira y el torque magnético τ ejercido sobre la espira.



3. (10 pts.) El espacio entre dos conchas cilíndricas de gran longitud L, de radio interior a y radio exterior b (siendo $b > a$) se rellena con un material conductor de conductividad eléctrica σ. Calcule la resistencia total del material cuando se establece una diferencia de potencial $V = V_1 - V_2$ (siendo $V > 0$) entre las dos conchas cilíndricas.



Soluciones

Pregunta 1
(a)

$$I = I_1 + I_2$$

$$\varepsilon - IR_3 - I_2R_2 - \frac{1}{c}Q = 0$$

$$I_1R_1 - I_2R_2 - \frac{1}{c}Q = 0$$

$$I_2 = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow 3R\frac{dQ}{dt} + \frac{z}{c}Q = \varepsilon \ ; \ Q(t=0) = 0$$

Suponga, $Q(t) = Q_0 e^{\alpha t} + Q_p$

$$3R\frac{d}{dt}(Q_0 e^{\alpha t}) + \frac{z}{c}(Q_0 e^{\alpha t}) = 0 \Rightarrow 3R\alpha + \frac{z}{c} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{z}{3}\frac{1}{RC}$$

$$3R\frac{dQ}{dt} + \frac{z}{c}Q = 3R\frac{d}{dt}(Q_0 e^{\alpha t} + Q_p) + \frac{z}{c}(Q_0 e^{\alpha t} + Q_p) = \frac{z}{c}Q_p = \varepsilon \Rightarrow Q_p = \frac{1}{z}\varepsilon c$$

$$Q(t=0) = 0 \Rightarrow Q(0) = Q_0 + Q_p = 0 \Rightarrow Q_0 = -Q_p = -\frac{1}{2}\varepsilon c$$

Entonces,

$$Q(t) = \frac{1}{2}\varepsilon c\left[1 - e^{-\frac{zt}{3Rc}}\right] \ ; \ \tau = \frac{3}{2}Rc$$

(b)

$$I_2(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{2t}{3Rc}}$$

$$I_1(t) = I_2(t) + \frac{1}{Rc}Q(t) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{R}\left[1 - e^{-\frac{2t}{3Rc}}\right]$$

$$I(t) = I_2(t) + I_2(t) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{R}\left[1 + e^{-\frac{2t}{3Rc}}\right]$$

(c)

$$P_1(t) = I_1(t)V_1(t) = I_1^2(t)R_1 = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{R}\left[1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{z}t} + \frac{1}{9}e^{-\frac{2}{z}t}\right]$$

$$\Rightarrow P_1(t=z) = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{R}\left[1 - \frac{2}{3}e^{-1} + \frac{1}{9}e^{-2}\right] = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{R}\left[1 + \frac{1-6e}{9e^2}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{R}\left[\frac{9e^2 - 6e + 1}{9e^2}\right]$$

Pregunta 2
(a) Pensemos al alambre como tres secciones que etiquetamos I, II, III. Entonces, $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}^{I}(\vec{r}) + \vec{B}^{II}(\vec{r}) + \vec{B}^{III}(\vec{r})$ sobre el eje x, $\vec{B}^{I}(\vec{r}) = \vec{B}^{III}(\vec{r})$. Calculamos la contribución de cada tramo por separado
Mediante la Ley de Biot-Savant, para I constante

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}I\int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Entonces,

$\vec{r} = \vec{0}$
$\vec{r'}_{II} = R\hat{u}_r$
$\vec{dl}_{II} = Rd\theta\hat{u}_\theta$
$\hat{u}_r = \cos\theta\hat{j} + \operatorname{sen}\theta\hat{k}$
$\hat{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$

$$\vec{B}_{II}(\vec{0}) = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Rd\theta\hat{u}_\theta \times (-R\hat{u}_r)}{R^3} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\hat{i}$$
$$= \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{R}\hat{i}$$

$\vec{r} = \vec{0}$
$\vec{r'}_{III} = x\hat{i} + R\hat{k}$
$\vec{dl}_{III} = dx\hat{i}$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{III}(\vec{0}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_0^\infty \frac{dx\hat{i} \times (-x\hat{i} - R\hat{k})}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_0^\infty \frac{Rdx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{j} \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_0^\infty \frac{1}{R^2}\frac{Rdx}{[x^2+(\frac{x}{R})^2]^{\frac{3}{2}}}\hat{j}; && \tan\beta = \frac{x}{R} \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\beta\, d\beta}{(1+\tan^2\beta)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}; && \sec^2\beta\, d\beta = \frac{1}{R}dx \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta\hat{j}; && 1+\tan^2\beta = \sec^2\beta \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{R}\hat{j} = \vec{B}_I(\vec{0})
\end{aligned}$$

Se obtiene

$$\vec{B}(\vec{0}) = \vec{B}^I(\vec{0}) + \vec{B}^{II}(\vec{0}) + \vec{B}^{III}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4}\frac{I}{R}\left[\hat{i} + \frac{2}{\pi}\hat{j}\right]$$

(b) Una partícula de carga q y velocidad $\vec{v}$ en presencia de un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B};\ \text{con } \vec{v} = v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k} \text{ en el origen de coordenadas}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q\left[(v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}) \times \frac{\mu_0}{4}\frac{I}{R}\left[\hat{i} + \frac{2}{\pi}\hat{j}\right]\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4}\frac{I}{R}q\left(\frac{2}{\pi}v_{0z}(-\hat{i}) + v_{0z}\hat{j} + v_{0y}(-\hat{k})\right)
\end{aligned}$$

(c) Una espira de radio r y corriente I' posee un momento dipolar magnético

$$\vec{\mu} = (\pi r^2)I'\hat{n}$$

siendo $\hat{n}$ aquel que cumple la regla de la mano derecha con $\vec{J}'$ (densidad de corriente asociada a I').
En presencia de un campo magnético uniforme, el torque es

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, Como la espira es muy pequeña, $\vec{B}$ es considerado uniforme, por ende,

$$\vec{\mu} = (\pi r^2)I'\hat{j}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4}(\pi r^2)\frac{I}{R}I'(-\hat{k})$$

Pregunta 3

La densidad de corriente es radial hacia afuera, por lo que atraviesa superficies cilíndricas coaxiales al material. Escogiendo una pequeña resistencia dR, como esas superficies con un grosor diferencial dr, se tiene

$$dR = \rho\frac{dr}{2\pi r L};\ r \text{ es el radio de la resistencia}$$

Estos dR están atravesados por la misma corriente, por lo que se les puede considerar conectados en serie, por lo tanto:

$$R = \int dR = \int_a^b \rho\frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Método alternativo

$$R = \frac{V}{I};\ I = \vec{J}\cdot\vec{s},\ \vec{J} = \sigma\vec{E},\ \vec{s} = 2\pi r L\hat{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{u}_r$$

$$V_{21} = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \left[\frac{\lambda}{2\pi r}\hat{u}_r\right]\left[dr\,\hat{u}_r\right] = -\frac{\lambda}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$I = \sigma\vec{E}\cdot\vec{s} = \sigma\left[\frac{\lambda}{2\pi r}\hat{u}_r\right]\cdot\left[2\pi r L\hat{u}_r\right] = \sigma\lambda L$$

$$\Rightarrow \frac{V_{12}}{I} = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Este parcial fue creado y resuelto por el Prof. Kevin Ng y digitalizado por Jean F.Gómez para Guías USB

Jean Franco Gómez

15-10581

Ingeniería de la Computación

Twitter: @JeanFranGo

gecousb.com.ve

Twitter: @gecousb

Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com